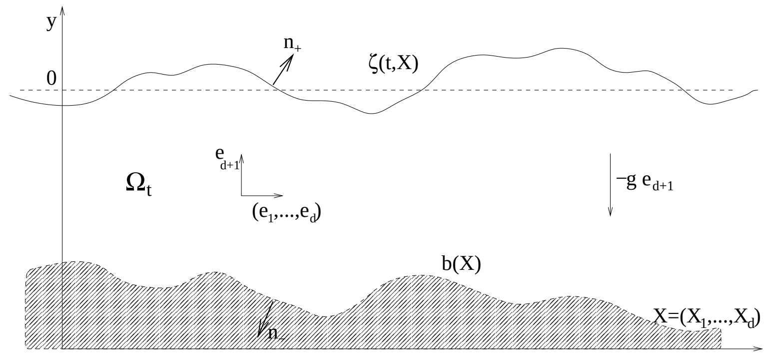
Sur la caractère bien posé des équations d'Euler avec surface libre

David LANNES,
MAB, Université Bordeaux 1 et CNRS UMR 5466,
351 Cours de la Libération,
33405 Talence Cedex, France.

1 Introduction

1.1 Présentation du problème

Le problème des ondes de surface pour un fluide idéal consiste à décrire la mouvement de la surface libre et le champ de vitesses d'une couche de fluide parfait, incompressible et irrotationnel, sous l'influence de la gravité. Nous nous restreignons ici au cas où la surface est un graphe paramétré par une fonction $\zeta(t, X)$, où t désigne la variable de temps et $X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ les variables horizontales. Le fond, non nécessairement plat, est lui aussi paramétré par une fonction $b(X)$, indépendante du temps. Nous notons Ω_t le domaine occupé par le fluide à l'instant t.



La propriété d'incompressibilité du fluide est traduite par l'équation

$$\operatorname{div} V = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \qquad t \geq 0, \tag{1.1}$$

où $V = (V_1, \dots, V_d, V_{d+1})$ désigne le champ de vitesse ($V_1, \dots, V_d$ étant les composantes horizontales, et V_{d+1} la composante verticale). L'irrotationnalité s'exprime quant à elle par la relation

$$\operatorname{curl} V = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \qquad t \geq 0. \tag{1.2}$$

On complète le système d'équations à l'intérieur du fluide par les équations d'Euler,

$$\partial_t V + V \cdot \nabla_{X,y} V = -g e_{d+1} - \nabla_{X,y} P \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

où $-ge_{d+1}$ est l'accélération de la gravité, et P désigne la pression, qui est également une des inconnues du problème.
Pour clore ce système d'équations, nous devons donner les conditions aux bords satisfaites par la vitesse au fond et à la surface ; elles sont obtenues en traduisant l'hypothèse physique qu'aucune particule de fluide n'est transportée au travers de ces surfaces. Plus précisément, cela s'écrit :

$$V_n|_{\{y=b(X)\}} := \mathbf{n}_- \cdot V|_{\{y=b(X)\}} = 0, \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.4}$$

où $\mathbf{n}_- := \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla_X b|^2}}(\nabla_X b, -1)^T$ est le vecteur normal sortant au bord inférieur de Ω_t. A la surface libre, on a

$$\partial_t \zeta - \sqrt{1+|\nabla_X \zeta|^2} V_n|_{\{y=\zeta(X)\}} = 0, \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.5}$$

où $V_n|_{\{y=\zeta(X)\}} := \mathbf{n}_+ \cdot V|_{\{y=\zeta(X)\}}$, et $\mathbf{n}_+ := \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla_X \zeta|^2}}(-\nabla_X \zeta, 1)^T$ désigne le vecteur normal sortant à la surface.
En négligeant les effets de tension de surface, P est constante à la surface. Quitte à renormaliser, on peut supposer

$$P|_{\{y=\zeta(X)\}} = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad X \in \mathbb{R}^d. \tag{1.6}$$

1.2 Reformulation des équations

Les équations (1.1)-(1.6) ne sont pas très maniables d'un point de vue mathématique, notamment parce qu'elles sont définies sur un domaine qui est lui-même une des inconnues du problème. Nous en donnons donc une formulation alternative qui ne fait intervenir que deux équations d'évolution sur $\mathbb{R}^d$. La première étape consiste à écrire (1.1)-(1.6) sous la formulation classique de Bernouilli. Des hypothèses d'incompressibilité et d'irrotationnalité (1.1 et (1.2), on déduit l'existence d'un potentiel des vitesses ϕ tel que $V = \nabla_{X,y}\phi$ et

$$\Delta_{X,y}\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \quad t \geq 0; \tag{1.7}$$

les conditions aux bords (1.4) et (1.5) peuvent aussi s'exprimer à l'aide de ϕ :

$$\partial_{\mathbf{n}_-}\phi|_{\{y=b(X)\}} = 0, \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.8}$$

et

$$\partial_t \zeta - \sqrt{1+|\nabla_X \zeta|^2}\partial_{\mathbf{n}_-}\phi|_{\{y=\zeta(t,X)\}} = 0, \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad X \in \mathbb{R}^d, \tag{1.9}$$

où l'on a utilisé les notations $\partial_{\mathbf{n}_-} := \mathbf{n}_- \cdot \nabla_{X,y}$ et $\partial_{\mathbf{n}_+} = \mathbf{n}_+ \cdot \nabla_{X,y}$. Finalement, l'équation d'Euler (1.3) peut être mise sous la forme

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_{X,y}\phi|^2 + gy = -P \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \quad t \geq 0. \tag{1.10}$$

Comme dans [4], nous pouvons transformer les équations (1.7)-(1.10) en un système où toutes les fonctions sont évaluées à la surface libre seulement. Pour cela, introduisons la trace du potentiel des vitesses ϕ à la surface,

$$\psi(t,X) := \phi(t,X,\zeta(t,X)),$$

et l'opérateur de Dirichlet-Neumann (renormalisé) $G(\zeta)$ qui est l'opérateur linéaire défini par

$$G(\zeta)\psi := \sqrt{1+|\nabla_X\zeta|^2}\partial_{\mathbf{n}_+}\phi_{|\{y=\zeta(t,X)\}}. \tag{1.11}$$

En prenant la trace de (1.10) à la surface et en exploitant le fait que la pression est nulle à la surface, on obtient après quelques calculs que (1.7)-(1.10) sont équivalentes au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \zeta - G(\zeta)\psi = 0, \\ \partial_t \psi + g\zeta + \dfrac{1}{2}|\nabla_X \psi|^2 - \dfrac{1}{2(1+|\nabla_X\zeta|^2)}\left(G(\zeta)\psi + \nabla_X\zeta\cdot\nabla_X\psi\right)^2 = 0, \end{array} \right. \tag{1.12}$$

qui est un système de deux équations d'évolution sur $\mathbb{R}^d$ portant sur l'élévation de la surface libre $\zeta(t,X)$ et la trace du potentiel des vitesses $\psi(t,X)$ à la surface. C'est avec ce système que nous travaillerons dorénavant.

1.3 Enoncé du résultat principal et plan de l'article

Les premiers travaux sur le caractère bien posé (dans des espaces de type Sobolev) des équations d'Euler avec surface libre remontent à Nalimov [6], Yosihara [11] et Craig [2]. Ces auteurs considèrent le cas $d = 1$ et travaillent dans un cadre lagrangien. Ces travaux reposent fortement sur le fait que le domaine occupé par le fluide est de dimension deux, ce qui permet d'utiliser des outils d'analyse harmonique, et en particulier d'exprimer l'opérateur de Dirichlet-Neumann à l'aide d'une intégrale de Cauchy. Grâce à une propriété subtile d'annulation remarquée par Nalimov, les équations des ondes de surface (1.1)-(1.3) peuvent alors être "quasi-linéarisés". Notons que ces travaux se restreignent tous au cas de données petites. C'est Wu [9] qui trouva le moyen de considérer des données quelconques, en prouvant que le classique critère d'instabilité de Rayleigh-Taylor (qui impose que la surface n'accélère pas plus vite vers l'intérieur du fluide que la composante normale de la gravité) est satisfait dès que la surface ne se coupe pas elle-même. Le travail de Wu est toutefois limité au cas où la profondeur est infinie.
Le cas de la dimension trois (donc de la dimension deux de surface) n'a été que très peu abordé. Essentiellement, Wu [10] a généralisé le résultat de [9] à la dimension trois. Les méthodes employées sont par contre très différentes et

reposent sur l'analyse des algèbres de Clifford (le formalisme complexe n'étant bien sûr plus adapté en dimension trois). Là encore, seul le cas de la profondeur infinie est traité.
L'objectif de ce travail est de traiter les cas encore ouverts (profondeur finie et donnés quelconques en dimension deux ou trois) et de fournir une preuve reposant sur des outils classiques en EDP. Dans le cas de fonds plats, le résultat principal est le suivant :

Theorème 1.1 *Il existe $M \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de d, tel que pour tout $s \geq M$ et $(\zeta_0, \psi_0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)^2$ satisfaisant*

$$\zeta_0 - b \geq 2h_0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{R}^d \quad \textit{pour un certain} \quad h_0 > 0,$$

il existe $T > 0$ et une unique solution $(\zeta, \psi) \in C^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)^2)$ aux équations des ondes de surface (1.12) avec condition initiale (ζ_0, ψ_0).

L'idée de la preuve est extrêmement classique : nous linéarisons les équations (1.12), prouvons des estimations d'énergie sur l'opérateur linéarisé qui nous permettent de conclure à l'aide d'un schéma itératif, en l'occurence de type Nash-Moser.
Plusieurs difficultés viennent malheureusement rendre cette démarche un peu délicate. La première d'entre elles survient au moment de calculer le linéarisé des équations (1.12) autour d'un état quelconque. En effet, il faut dériver l'application $(\zeta, \psi) \mapsto G(\zeta)\psi$ par rapport à ψ (ce qui ne pose aucun problème) et ζ. Cette dernière opération revient à calculer la *dérivée de forme* de l'opérateur de Dirichlet-Neumann puisque ζ définit la géométrie du domaine occupé par le fluide. Nous donnons une expression explicite de cette dérivée de forme qui permet de donner une expression explicite de l'opérateur linéarisé dans son intégralité (i.e. sans reste d'ordre inférieur).
Une fois l'opérateur linéarisé obtenu, il faut réaliser des estimations d'énergie sur le problème de Cauchy associé, ce qui n'est pas immédiat puisqu'il s'avère que le linéarisé est non strictement hyperbolique, c'est-à-dire que son symbole principal possède une valeur propre purement imaginaire de multiplicité deux. Il s'ensuit qu'une condition de Lévy sur le symbole sous-principal est nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé. A l'aide d'un changement d'inconnues très simple, nous exhibons cette condition de Lévy et prouvons qu'elle coïncide avec la critère d'instabilité de Rayleigh-Taylor. Nous montrons que ce critère est toujours satisfait lorsque le fond est plat, et donnons une condition suffisante pour qu'il soit vérifié lorsque le fond n'est pas plat.
Enfin, pour pouvoir appliquer le schéma itératif de Nash-Moser, il nous faut obtenir des estimations d'énergie *douces*, ce qui nécessite l'obtention d'estimations douces sur le Dirichlet-Neumann, ainsi que sur les commutateurs entre cet opérateur et des dérivés spatiales. Pour cela, nous utilisons une méthode très simple reposant sur des estimations elliptiques et l'existance de *difféomorphismes régularisants* entre le domaine du fluide et un domaine redressé fixé $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times (0,1)$. Nous avons également besoin du symbole principal de l'opérateur de Dirichlet-Neumann.

Plan de l'article. Dans la prochaine section, nous indiquons comment obtenir une estimation douce sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann. Dans la section 3, nous contrôlons les commutateurs de cet opérateur avec les dérivés spatiales. Nous établissons alors dans la section 4 l'expression exacte de la dérivée de forme du Dirichlet-Neumann. Nous pouvons alors, dans la section 5, étudier la linéarisation des équations (1.12), avant de conclure dans la section 6.

Remarque 1.1 *Les preuves données dans cet article sont schématiques, et les références bibliographiques loin d'être exhaustives. Nous renvoyons à [5] pour plus de précisions.*

2 Estimations douces sur l'opérateur de Dirichlet-Neumann

Il est aisé de voir que l'opérateur $G(\zeta)\cdot$ est d'ordre un. Evaluer la norme de cet opérateur en fonction de ζ et de ses dérivées est par contre plus délicat. Plusieurs travaux ont abordé ce problème en exprimant l'opérateur de Dirichlet-Neumann à l'aide d'opérateurs intégraux singuliers (citons par exemple [1] et [3, 4], ainsi que [10] et les références qui y sont données). Ces résultats ne donnent pas d'estimations douces optimales dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir une profondeur finie avec un fond non nécessairement plat. Le théorème suivant donne une telle estimation douce, avec une dépendance en ζ optimale. Contrairement aux travaux cités ci-dessus, nous utilisons une méthode basée sur des estimations elliptiques, ainsi que sur l'existence de difféomorphismes régularisants.

Theorème 2.1 *Supposons que la paramétrisation du fond b soit régulière et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Alors, pour un certain indice $s_0 > 0$ et pour tout $s \geq 1/2$ et $(\zeta, \psi) \in H^\infty(\mathbb{R}^d)^2$ tel que $\inf_{\mathbb{R}^d}(\zeta - b) > 0$, on a*

$$|G(\zeta)\psi|_{H^s} \leq C(s, b, |\zeta|_{H^{s_0}})(|\psi|_{H^{s+1}} + |\zeta|_{H^{s+1}}|\psi|_{H^{s_0}}).$$

Preuve.
Etape 1. Commençons par transformer l'équation de Laplace (1.7) avec condition de Dirichlet $\phi = \psi$ à la surface et condition de Neumann homogène $\partial_{\mathbf{n}_-}\phi = 0$ au fond en une équation elliptique sur le domaine redressé $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times (-1, 0)$. Pour cela, soit S un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ sur le domaine Ω occupé par le fluide. Nous pouvons imposer que S soit de la forme $S(\widetilde{X}, \widetilde{y}) = (\widetilde{X}, s(\widetilde{X}, \widetilde{y}))$, c'est-à-dire que les variables horizontales sont laissées invariantes par ce difféomorphisme. En introduisant $\widetilde{\phi} = \phi \circ S$, il est facile de voir que le problème de Laplace satisfait par ϕ se transforme en un problème elliptique sur $\mathcal{S}$ pour $\widetilde{\phi}$:

$$\begin{cases} -\nabla_{\widetilde{X},\widetilde{y}} \cdot P\nabla_{\widetilde{X},\widetilde{y}}\widetilde{\phi} = 0 \\ \widetilde{\phi}|_0 = \psi, \qquad \partial_n^P\widetilde{\phi}|_{-1} = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

où P est une matrice symétrique définie positive ne dépendant que du difféomorphisme choisi, et ∂_n^P désigne la dérivée conormale associée à ce nouvel opérateur elliptique. Il est également facile de voir que l'opérateur de Dirichlet-Neumann s'exprime simplement comme ceci :

$$G(\zeta)\psi = -\partial_n^P \widetilde{\phi}|_0. \tag{2.14}$$

Etape 2. Afin de connaître la classe de régularité des coefficients de P, il nous faut faire une hypothèse sur le difféomorphisme S que l'on a choisi. Remarquant qu'un exemple simple est fourni par $S(\widetilde{X},\widetilde{y}) = (\widetilde{X}, s(\widetilde{X},\widetilde{y}))$ avec $s(\widetilde{X},\widetilde{y}) = -b(\widetilde{X})\widetilde{y} + (1+\widetilde{y})\zeta(\widetilde{X})$, et en se rappelant que l'on a supposé la paramétrisation b du fond bornée ainsi que toutes ses dérivées, il est naturel de supposer que la composante verticale s du difféomorphisme S se décompose en $s = s_1 + s_2$ avec s_1 bornée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathcal{S}$ et $s_2 \in H^k(\mathcal{S})$ pour un indice k suffisamment élevé. Sous cette hypothèse, un calcul technique mais élémentaire montre que P se décompose en $P = P_1 + P_2$, avec $\|P_1\|_{W^{k,\infty}(\mathcal{S})} \leq C(k, s_1)$ et $\|P_2\|_{H^k(\mathcal{S})} \leq C(k, s_1, \|s_2\|_{H^{k_0}(\mathcal{S})})\|s_2\|_{H^{1+k}(\mathcal{S})}$, k_0 étant un entier ne dépendant que de la dimension d. Grâce à (2.14), on peut alors obtenir une première estimation (grâce aussi au théorème de trace),

$$|G(\zeta)\psi|_{H^{k+1/2}} \leq C(k, s_1, \|s_2\|_{H^{k_0}(\mathcal{S})})(\|\widetilde{\phi}\|_{H^{k+2}(\mathcal{S})} + \|s_2\|_{H^{k+2}}\|\widetilde{\phi}\|_{H^{k_0}}). \tag{2.15}$$

Etape 3. On montre alors des estimations elliptiques douces (à la fois en les coefficients de P et en ψ) sur la solution du problème aux limites (2.13). On ne détaillera pas cette étape ici. On obtient ainsi, grâce à (2.15),

$$|G(\zeta)\psi|_{H^{k+1/2}} \leq C(k, s_1, \|s_2\|_{H^{k_0}(\mathcal{S})})(|\psi|_{H^{k+3/2}} + \|s_2\|_{H^{k+2}}|\psi|_{H^{k_0-1/2}}). \tag{2.16}$$

Etape 4. Il suffit alors de bien choisir le difféomorphisme utilisé pour redresser le domaine afin de déduire l'assertion du théorème de (2.16). Si l'on prend le difféomorphisme trivial évoqué plus haut, on a $s_2(\widetilde{X},\widetilde{y}) = (\widetilde{y}+1)\zeta(\widetilde{y})$ et par conséquent $\|s_2\|_{H^{k+2}} \leq \text{Cst } |\zeta|_{H^{k+2}}$ et on obtient une estimation certes douce, mais pas optimale en ce qui concerne la dépendance en ζ. Il faut pour cela gagner une demi-dérivée. Pour cela, nous montrons qu'il existe des *difféomorphismes régularisants*, c'est-à-dire tels que l'on ait $\|s_2\|_{H^{k+2}} \leq \text{Cst } |\zeta|_{H^{k+3/2}}$ (au lieu d'un contrôle en norme H^{k+2} dans le membre de droite). Notons $\langle D\rangle$ l'opérateur $(1-\Delta_{\widetilde{X}})^{1/2}$; on peut vérifier que $s(\widetilde{X},\widetilde{y}) = -b(\widetilde{X})\widetilde{y} + (1+\widetilde{y})\chi(\lambda\widetilde{y}\langle D\rangle)a(\widetilde{X})$ convient si χ est une fonction régulière à support compact valant 1 et ayant une dérivée nulle en zéro, et si λ est un réel convenablement choisi. Cela conclue la preuve du théorème (tout du moins pour les indices de Sobolev de la forme $s = k + 1/2$. Pour les autres, il faut interpoler).

$\blacksquare$

3 Estimations sur les commutatateurs

Pour obtenir des estimations d'énergie sur le linéarisé des équations (1.12), il faudra contrôler plusieurs commutateurs avec des opérateurs de dérivées. Le plus délicat est sans nul doute $[\Lambda^s, G(\zeta)\cdot]$ où Λ désigne l'opérateur de dérivation d'ordre un, $\Lambda := (1-\Delta_X)^{1/2}$. Nous montrons ici comment obtenir une estimation douce sur ce terme. En fait, nous nous contenterons de regarder des indices de dérivation de type $k+1/2$, et plus précisément des commutateurs du type $[\Lambda^{1/2}\partial^\alpha, G(\zeta)\cdot]$, avec $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$.

Proposition 3.1 *Supposons que la paramétrisation du fond b soit régulière et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Alors, pour un certain indice $s_0 > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $(\zeta, \psi) \in H^\infty(\mathbb{R}^d)^2$ tel que $\inf_{\mathbb{R}^d}(\zeta - b) > 0$, on a*

$$\Big|[\Lambda^{1/2}\partial^\alpha, G(\zeta)\cdot]\psi\Big|_2 \leq C(k, b, |\zeta|_{H^{s_0}})(|\psi|_{H^{k+1/2}} + |\zeta|_{H^{k+3/2}}|\psi|_{H^{s_0}}),$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$.

Preuve.
Etape 1. On décompose tout d'abord le commutateur de la manière suivante :

$$[\Lambda^{1/2}\partial^\alpha, G(\zeta)\cdot]\psi = [\Lambda^{1/2}, G(\zeta)]\partial^\alpha\psi + \Lambda^{1/2}[\partial^\alpha, G(\zeta)]\psi. \qquad (3.17)$$

L'intérêt de cette décomposition est que le premier terme du membre de droite et un commutateur qui ne dépend pas de k.
Etape 2. Pour contrôler le premier terme du membre de droite de (3.17), on s'attache tout d'abord à trouver le symbole principal de $G(\zeta)\cdot$. Introduisons l'opérateur pseudodifférentiel de symbole $g_\zeta(X,\xi) = \sqrt{(1+|\nabla_X\zeta|^2)\xi^2 - (\nabla_X\cdot\xi)^2}$. Alors, en utilisant la méthode de factorisation des opérateurs elliptiques (voir par exemple [7, 8]), et en utilisant le même type d'estimations elliptiques que dans la preuve du Théorème 2.1, on obtient l'estimation

$$|(G(\zeta) - g_\zeta(X,D))\psi|_{H^s} \leq C(b, |\zeta|_{H^{s_0}})|\psi|_{H^s}, \qquad s = 0, 1/2. \qquad (3.18)$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\Big|[\Lambda^{1/2}, G(\zeta)]\partial^\alpha\psi\Big|_2 &\leq \Big|[\Lambda^{1/2}, g_\zeta(X,D)]\partial^\alpha\psi\Big|_2 \\ &+ \quad |(G(\zeta) - g_\zeta(X,D))\partial^\alpha\psi|_{H^{1/2}} + \Big|(G(\zeta) - g_\zeta(X,D))\Lambda^{1/2}\partial^\alpha\psi\Big|_2.\end{aligned}$$

Grâce à (3.18), les deux derniers termes du membre de droite de l'inégalité ci-dessus peuvent être contrôlés par le second membre de l'estimation donnée dans l'énoncé de la proposition. Il en est de même du premier terme, grâce aux théorèmes classiques sur la composition d'opérateurs pseudo-differentiels.
Etape 3. Il nous faut maintenant contrôler le second terme du second membre de (3.17). Cette étape est assez techique et nous l'omettons ici. L'idée est que la norme L^2 du terme en question est égale à la norme $H^{1/2}$ de $[\partial^\alpha, G(\zeta)]\psi$. En faisant apparaître ce commutateur, à un terme aisément contrôlable près, comme une donnée de Neumann pour un opérateur elliptique du second ordre sur le domaine redressé $\mathcal{S}$, on voit qu'on peut estimer sa norme $H^{1/2}$ à l'aide de la norme $L^2(\mathcal{S})$ du terme source de ce problème elliptique. Il s'avère que ce terme source peut effectivement être contrôlé "doucement" à l'aide de théorèmes de commutation classiques (rappelons que des preuves détaillées des résultats présentés ici sont données dans [5]).

■

4 Dérivée de forme de l'opérateur de Dirichlet-Neumann

La linéarisation des équations (1.12) requiert entre autres la linéarisation de l'application $\zeta \mapsto G(\zeta)\psi$. En d'autres termes, nous devons calculer la dérivée de forme de l'opérateur de Dirichlet-Neumann.

Theorème 4.1 *Supposons que la paramétrisation du fond b soit régulière et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Soit* $(\underline{\zeta}, \psi) \in H^\infty(\mathbb{R}^d)^2$ *tel que* $\inf_{\mathbb{R}^d}(\underline{\zeta} - b) > 0$.
Pour k suffisamment grand, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\underline{\zeta}}$ *de* $\underline{\zeta}$ *dans* $H^{k+3/2}(\mathbb{R}^d)$ *tel que l'application*

$$\zeta \in \mathcal{U}_{\underline{\zeta}} \subset H^{k+3/2}(\mathbb{R}^d) \mapsto G(\zeta)\psi \in H^{k+1/2}(\mathbb{R}^d)$$

soit bien définie et différentiable. De plus, pour tout $h \in H^{k+3/2}(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$d_{\underline{\zeta}} G(\cdot)\psi \cdot h = -G(\underline{\zeta})\,(h\underline{Z}) - \nabla_{X,y} \cdot (h\underline{\mathbf{v}})\,,$$

où

$$\underline{Z} := \frac{1}{1 + |\nabla_X \underline{\zeta}|^2} \big(G(\underline{\zeta})\psi + \nabla_X \underline{\zeta} \cdot \nabla_X \psi\big)\,,$$

et

$$\underline{\mathbf{v}} := \nabla_X \psi - \underline{Z} \nabla_X \underline{\zeta}.$$

Preuve.
Etape 1. Comme on l'a vu dans la preuve du Th. 2.1, on peut exprimer l'opérateur de Dirichlet-Neumann à l'aide du problème redressé. Si l'on note $\psi^\flat$ la solution du problème aux limites (2.13) avec condition de Dirichlet à la surface ψ, on a $G(\underline{\zeta})\psi = e_{d+1} \cdot P_{\underline{\zeta}} \nabla_{X,y} \psi^\flat_{\underline{\zeta}}|_0$, où l'indice $\underline{\zeta}$ dans $P_{\underline{\zeta}}$ et $\psi^\flat_{\underline{\zeta}}$ a été rajouté pour souligner la dépendance de cette matrice en la paramétrisation de la surface. Par conséquent, la dérivée recherchée s'écrit

$$d_{\underline{\zeta}} G(\cdot)\psi \cdot h = e_{d+1} \cdot (d_{\underline{\zeta}} P \cdot h) \nabla_{X,y} \psi^\flat_{\underline{\zeta}}|_0 + \partial_n^{P_{\underline{\zeta}}} v_{\underline{\zeta},h}|_0, \tag{4.19}$$

où $v_{\underline{\zeta},h}$ désigne la dérivée de l'application $\zeta \mapsto \psi^\flat_\zeta$ en $\underline{\zeta}$ et dans la direction h. Comme on a une expression explicite de P_ζ en fonction du difféomorphisme et donc de ζ, on trouve une expression explicite du premier terme du membre de droite de (4.19) en fonction de ζ, $\nabla_X \psi$ et $G(\zeta)\psi$. Il faut montrer que l'on peut faire la même chose pour le deuxième terme. Il est facile de voir que $v_{\underline{\zeta},h}$ existe effectivement et est solution du problème elliptique obtenu en différentiant par rapport à ζ le problème aux limites satisfait par $\psi^\flat$; plus précisément,

$$\begin{cases} -\nabla_{X,y} \cdot P_{\underline{\zeta}} \nabla_{X,y} v_{\underline{\zeta},h} = \nabla_{X,y} \cdot (d_{\underline{\zeta}} P \cdot h) \nabla_{X,y} \psi^\flat_{\underline{\zeta}} \\ v_{\underline{\zeta},h}|_0 = 0, \qquad \partial_n^{P_{\underline{\zeta}}} v_{\underline{\zeta},h}|_{-1} = -e_{d+1} \cdot (d_{\underline{\zeta}} P \cdot h) \nabla_{X,y} \psi^\flat_{\underline{\zeta}}|_{-1}. \end{cases}$$

Il s'avère qu'il est possible de relever explicitement ce problème aux limites. En effet, si l'on pose $w_{\underline{\zeta},h} := \frac{d_{\underline{\zeta}} s\cdot h}{\partial_y s_{\underline{\zeta}}}\partial_y \psi^\flat_{\underline{\zeta}}$ (où $s_{\underline{\zeta}}$ désigne la composante verticale du difféomorphisme S de $\mathcal{S}$ sur Ω), alors $v_{\underline{\zeta},h} - w_{\underline{\zeta},h}$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{l} -\nabla_{X,y}\cdot P_{\underline{\zeta}}\nabla_{X,y}(v_{\underline{\zeta},h} - w_{\underline{\zeta},h}) = 0 \\ v_{\underline{\zeta},h}|_0 = -\frac{h}{\underline{\zeta}-b}\partial_y\psi^\flat_{\underline{\zeta}}|_0, \qquad \partial_n^{P_{\underline{\zeta}}} v_{\underline{\zeta},h}|_{-1} = 0; \end{array}\right.$$

(notons que l'expression de ce relèvement est trouvée en s'appuyant sur des calculs formels inspirés par les travaux de Hadamard sur les plaques élastiques).
Par conséquent, on peut écrire $\partial_n^P v_{\underline{\zeta},h}|_0 = \partial_n^P w_{\underline{\zeta},h}|_0 + \partial_n^P(v_{\underline{\zeta},h} - w_{\underline{\zeta},h})|_0$. La première de ces deux composantes est calculable explicitement ; quant à la seconde, on remarquera qu'elle est égale à $-G(\underline{\zeta})(\frac{h}{\underline{\zeta}-b}\partial_y\psi^\flat_{\underline{\zeta}}|_0)$ et qu'elle peut donc elle aussi être calculée explicitement. Ceci achève de prouver que le deuxième terme du membre de droite de (4.19) peut se calculer. L'expression finale trouvée pour $d_{\underline{\zeta}}G(\cdot)\psi\cdot h$ est celle donnée dans l'énoncé du théorème.

■

5 Linéarisation et estimations d'énergie

Nous pouvons maintenant linéariser les équations (1.12) autour d'un état quelconque $\underline{U} := (\underline{\zeta}, \underline{\psi})^T$; notons $\underline{\mathcal{L}}$ l'opérateur linéarisé. Grâce au Théorème 4.1, nous pouvons donner une expression explicite de $\underline{\mathcal{L}}$ (et pas uniquement de son symbole principal),

$$\underline{\mathcal{L}} = \partial_t + \left(\begin{array}{cc} G(\underline{\zeta})(\underline{Z}\cdot) + \nabla_X\cdot(\cdot\underline{\mathbf{v}}) & -G(\underline{\zeta})\cdot \\ \underline{Z}G(\underline{\zeta})(\underline{Z}\cdot) + (g + \underline{Z}\nabla_X\cdot\underline{\mathbf{v}}) & \underline{\mathbf{v}}\cdot\nabla_X\cdot - \underline{Z}G(\underline{\zeta})\cdot \end{array}\right).$$

On peut vérifier que le symbole principal de l'opérateur matriciel ci-dessus admet une valeur propre imaginaire pure double, à savoir $i\underline{\mathbf{v}}\cdot\xi$. Il s'ensuit que nous ne pouvons conclure au caractère bien posé du problème de Cauchy associé à $\underline{\mathcal{L}}$; il faut pour cela une condition de Lévy sur le symbole sous-principal de cet opérateur. Afin d'exprimer cette condition de Lévy de manière simple, nous triangularisons l'opérateur afin de faire apparaître sous forme canonique le bloc de Jordan. La matrice de changement de bases, *a priori* pseudo-différentielle, s'avère finalement extrêmement simple, et les termes de commutateurs que l'on s'attendrait à voir surgir dans les termes d'ordre inférieur de l'opérateur triangularisé s'annulent tous ! De manière plus précise, l'équation $\underline{\mathcal{L}}U = H$ est équivalente à l'équation $\underline{\mathcal{M}}V = (H_1, H_2 - \underline{Z}H_1)^T$ avec $V := (U_1, U_2 - \underline{Z}U_1)^T$ et

$$\underline{\mathcal{M}} := \partial_t + \left(\begin{array}{cc} \nabla_X\cdot(\cdot\underline{\mathbf{v}}) & -G(\underline{\zeta})\cdot \\ \underline{\mathfrak{a}} & \underline{\mathbf{v}}\cdot\nabla_X \end{array}\right),$$

avec $\underline{\mathfrak{a}} := g + \partial_t\underline{Z} + \underline{\mathbf{v}}\cdot\nabla_X\underline{Z}$.
La condition de Lévy est donc claire ; nous faisons temporairement l'hypothèse qu'elle est vérifiée :

Hypothèse 5.1 *Il existe une constance* $c_0 > 0$ *telle que* $\underline{\mathfrak{a}} \geq c_0$ *sur* $\mathbb{R}^d$.

Sous cette hypothèse, il est facile de voir que le problème de Cauchy associé à $\underline{\mathcal{M}}$ est bien posé. En effet, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'opérateur $S = \begin{pmatrix} \underline{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & \mu + G(\underline{\zeta})\cdot \end{pmatrix}$ est un symétriseur pour $\underline{\mathcal{M}}$. L'énergie associée au problème est donc $E_s(V) := (\Lambda^s V, S\Lambda^s V)$. Pour des raisons techniques, nous devons altérer légèrement cette définition ; pour tout $k \in \mathbb{N}$, prenons

$$E_{k+1/2}(V) := \sum_{|\alpha|\leq k} (\Lambda^{1/2}\partial^\alpha V, S\Lambda^{1/2}\partial^\alpha V).$$

Si μ est choisi assez grand, et sous l'Hypothèse 5.1, on vérifie que $E_{k+1/2} \sim |V|^2_{H^{k+1/2}\times H^{k+1}}$. On peut alors obtenir des estimations d'énergie sur $E_{k+1/2}(V)$ (grâce notamment aux estimations de commutateurs de la Section 3), et donc aussi des estimations en norme Sobolev. De ces estimations sur le problème de Cauchy associé à $\underline{\mathcal{M}}$, on déduit facilement des estimations d'énergie sur le problème de Cauchy associé à $\underline{\mathcal{L}}$. Toutes les précautions ont été prises (voir en particulier la Section 2) pour que ces estimations soient douces.

6 Conclusion

Avant de pouvoir faire fonctionner un schéma itératif pour prouver l'existence de solutions pour (1.12), il faut nous asssurer que l'Hypothèse 5.1 est bien satisfaite. La proposition qui suit fait le lien entre cette condition de Lévy et le critère de Rayleigh-Taylor qui asserte que la dérivée normale de la pression à la surface doit être strictement negative (et donc la pression positive à l'intérieur du fluide). Ici, la pression n'apparaît pas explicitement dans les équations. Nous introduisons donc une pression $\underline{P}$ définie comme suit : si $\underline{\phi}$ désigne le potentiel des vitesses associé à la condition de Dirichlet $\underline{\psi}$, alors on se sert de l'équation de Bernouilli (1.10) pour définir $\underline{P}$,

$$-\underline{P} := \partial_t \underline{\phi} + gy + \frac{1}{2}|\nabla_{X,y}\underline{\phi}|^2.$$

On a alors, après une vérification purement calculatoire,

Proposition 6.1 *Supposons que* $(\underline{\zeta}, \underline{\psi})$ *soit solution de (1.12) à un certain instant* t_0. *Alors,* $\underline{P}$ *s'annule à la surface à cet instant, et on a de plus* $\underline{\mathfrak{a}}(t_0) = -\partial_n \underline{P}_{|_{y=\underline{\zeta}(t_0,X)}}$.

Dans le cas de la profondeur infinie, Wu [9, 10] a montré que ce critère était toujours satisfait par les solutions de (1.12). La proposition suivant généralise ce résultat au cas de la profondeur finie lorsque le fond est plat. S'il n'est pas plat, nous donnons une condition suffisante pour qu'il soit satisfait.

Proposition 6.2 *Supposons que* $(\underline{\zeta}, \underline{\psi})$ *soit solution de (1.12) à un certain instant* t_0. *Soit* $\underline{\phi}$ *le potentiel des vitesses associé à la condition de Dirichlet* $\underline{\psi}$ *et*

II_b la deuxième forme fondamentale associée à la surface définie par le fond. Alors si

$$II_b \left(\nabla_{X,y}\underline{\phi}|_{y=b(X)}, \nabla_{X,y}\underline{\phi}|_{y=b(X)}\right) \leq \frac{g}{\sqrt{1+|\nabla_X b|^2}},$$

il existe une constante $c_0 > 0$ telle que $-\partial_n \underline{P}|_{y=\underline{\zeta}(t_0,X)} \geq c_0$ sur $\mathbb{R}^d$.

Preuve.
On remarque tout d'abord que la pression $\underline{P}$ telle que définie plus haut est une fonction sous-harmonique. Elle atteint donc son minimum au bord, et sa dérivée normale sortante aux points où le minimum est atteint est strictement négative. La condition donnée dans l'énoncé de la proposition assure que la dérivée normale de $\underline{P}$ au fond est toujours positive. Par conséquent, le minimum de la pression est forcément atteint à la surface. Comme on sait d'après la proposition précédente que $\underline{P}$ y est identiquement nulle à l'instant t_0, le minimum est atteint en tout point de la surface, et la dérivée normale y est donc partout strictement négative. La propriété énoncée dans la proposition est donc vraie sur tout compact. Comme elle l'est trivialement à l'infini d'après la Proposition 6.1 (car $g > 0$), cela achève la preuve.

■

Nous pouvons maintenant prouver notre théorème principal :

Theorème 6.1 *Il existe $M \in \mathbb{R}$ ne dépendant que de d, tel que pour tout $s \geq M$ et $(\zeta_0, \psi_0) \in H^{s+1}(\mathbb{R}^d)^2$ satisfaisant*

$$\zeta_0 - b \geq 2h_0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \quad \text{pour un certain} \quad h_0 > 0,$$

et, ϕ_0 désignant le potentiel des vitesses associé à la condition de Dirichlet ψ_0, si

$$II_b \left(\nabla_{X,y}\phi_0|_{y=b(X)}, \nabla_{X,y}\phi_0|_{y=b(X)}\right) \leq \frac{g}{\sqrt{1+|\nabla_X b|^2}},$$

alors il existe $T > 0$ et une unique solution $(\zeta, \psi) \in C^1([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)^2)$ aux équations des ondes de surface (1.12) avec condition initiale (ζ_0, ψ_0).

Preuve.
Les équations (1.12) étant sous forme résoluble, on peut construire un couple $(\underline{\zeta}, \underline{\psi})^T$ solution de (1.12) à tout ordre à l'instant $t = 0$. Grâce aux Propositions 6.1 et 6.2, on sait que l'Hypothèse 5.1 est satisfaite par $(\underline{\zeta}, \underline{\psi})^T$. Par conséquent, les estimations d'énergie obtenues dans la Section 5 sont valables si l'on linéarise dans un voisinage suffisamment petit de $(\underline{\zeta}, \underline{\psi})^T$. Il suffit donc d'appliquer un schéma itératif de type Nash-Moser dans un tel voisinage pour conclure.

■

References

[1] R. Coifman, Y. Meyer *Nonlinear harmonic analysis and analytic dependence*, Pseudodifferential operators and applications (Notre Dame, Ind., 1984), 71–78, Proc. Sympos. Pure Math., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[2] W. Craig, *An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits*, Comm. Partial Differential Equations **10** (1985), no. 8, 787–1003.

[3] W. Craig, D. Nicholls, *Traveling gravity water waves in two and three dimensions.* Eur. J. Mech. B Fluids **21** (2002), no. 6, 615–641.

[4] W.Craig, U. Schanz, C. Sulem, *The modulational regime of three-dimensional water waves and the Davey-Stewartson system*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 5, 615–667.

[5] D. Lannes, *Well-Posedness of the Water-Waves Equations*, Preprint Université Bordeaux I, 2003.

[6] V. I. Nalimov, *The Cauchy-Poisson problem.* (Russian) Dinamika Splošn. Sredy Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami, (1974), 104–210, 254.

[7] M. Taylor, *Partial differential equations. II. Qualitative studies of linear equations*, Applied Mathematical Sciences, **116**. Springer-Verlag, New York, 1996.

[8] F. Trèves *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1. Pseudodifferential operators*, The University Series in Mathematics. Plenum Press, New York-London, 1980.

[9] S. Wu, *Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in* 2-*D*, Invent. Math. **130** (1997), no. 1, 39–72.

[10] S. Wu, *Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 2, 445–495.

[11] H. Yosihara, *Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), no. 1, 49–96.